

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter.

EXERCICE N° 1

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Dans l'urne, il y a des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes. n boules sont blanches, n boules sont rouges et toutes les autres sont vertes (n est un entier naturel). Il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

- 1 - Déterminer l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n .
- 2 - On suppose que $n = 8$ dans cette question
 - a) Quelle est la probabilité p_1 , de tirer une boule de chaque couleur ?
 - b) Quelle est la probabilité p_2 , de tirer 3 boules vertes ?
(donner les résultats à 10^{-3} près par défaut).
- 3 - On considère la fonction f de la variable réelle définie sur $[1 ; 20]$ par $f(x) = -2x^3 + 42x^2$.
Etudier les variations de f .
- 4 - Dans cette question, on suppose que n appartient à A (défini dans la question 1) et on note $P(n)$, la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.
 - a) Déterminer $P(n)$.
 - b) En utilisant les résultats obtenus à la question 3, déterminer la valeur n_0 de n pour que $P(n)$ soit maximum.
Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut.

EXERCICE N° 2

Pour tout naturel n , on désigne par U_n , le nombre d'individus (exprimé en milliards) dans le monde en l'an $1990 + n$:

$U_0 = 5$ (en 1990), U_1 (en 1991), U_n (en $1990 + n$), ...

On suppose que le taux annuel de croissance du nombre d'individus est constant.

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} = K$$

En 1990, ce taux K est égal à 0,017.

- 1 - Démontrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n .
- 2 - a) Quel serait l'effectif de la population mondiale en 2000 ? en 2010 ? en 2020 ?
b) Au bout de combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublé à partir de 1990 ?
c) Si l'on suppose le taux de croissance constant depuis l'aube de l'humanité, quand le 1^{er} couple d'êtres humains vécut-il sur terre ?
- 3 - Étudions l'évolution de la population mondiale par période de 20 ans. On appelle V_0 le nombre d'individus dans le monde en 1990, V_1 celui en 2010, V_2 celui en 2030, ... V_n le nombre d'individus en $1990 + 20n$.
 - a) Montrer que pour tout entier n : $V_{n+1} = q V_n$ et donner la valeur approchée décimale par défaut de q à 10^{-2} près.
 - b) Calculer le taux de croissance pour une période de 20 ans.

EXERCICE N° 3

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

1 - Déterminer les réels a , b et c

2 - Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$

EXERCICE N° 4

Un serrurier dispose d'un trousseau de dix clés dont une seule est la bonne et essaie d'ouvrir une porte. On suppose les clés indiscernables et les essais aléatoires.

- 1 - Il essaie les clés en remettant à chaque fois la clé essayée dans le trousseau. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au quatrième essai seulement ?
- 2 - Il met en œuvre une autre méthode qui consiste à écarter la clé essayée et à poursuivre les essais avec les clés restantes. On désigne par X le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte. Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE N° 5

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{x}{3}}$ de courbe représentative C définie sur $[0 ; +\infty[$

- 1 - a) Calculer la dérivée de f , f' .
b) Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.
c) Dédire de ce qui précède l'existence d'un nombre réel unique $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$
d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$
- 2 - a) Donner la limite de f en $+\infty$
b) Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$. Quelle conclusion graphique peut-on en tirer ? (on désigne par P la courbe d'équation $y = x^2 - 3$)
- 3 - a) Dresser le tableau de variation de f
b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique non nulle a qui appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et que $0,8 \leq a \leq 0,9$
c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$
- 4 - Tracer dans le repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 1,5 cm) les courbes P et C .
Il conviendra de préciser la tangente à C au point d'abscisse 0.
- 5 - a) Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x^2 - 3)]dx$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.
b) Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?
c) Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.