

Corrigé - Contrôleur du Trésor Public 2003 (non officiel)

Mathématiques

EXERCICE N°1

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Dans l'urne, il y a des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes. n boules sont blanches, n boules sont rouges et toutes les autres sont vertes (n est un entier naturel). Il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1 - Déterminer l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n .

On a 42 boules : n blanches, n rouges et donc $42-2n$ vertes, puisqu'il n'y a que des boules blanches, rouges ou vertes. Or il y a au moins une boule de chaque couleur donc $n \geq 1$, $n \geq 1$ et $42-2n \geq 1$. Cette dernière inégalité est équivalente à $41 \geq 2n$, équivalent à $n \leq 20,5$. Or comme n est un entier, on a n est dans l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

2 - On suppose que $n=8$ dans cette question

a) Quelle est la probabilité p_1 , de tirer une boule de chaque couleur ? (à 10^{-3} près par défaut).

On va utiliser la formule probabilité = $\frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$. On tire trois boules simultanément

donc sans remise et non ordonné, on va donc utiliser des combinaisons. Il faut utiliser des combinaisons car c'est sans remise et sans ordre, ce qui donne

$$p_1 = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{C_{42}^8 \times C_{42}^8 \times C_{26}^1}{C_{42}^3} = 0,144$$

b) Quelle est la probabilité p_2 , de tirer 3 boules vertes ? (à 10^{-3} près par défaut).

De la même façon que précédemment, on obtient $p_2 = \frac{C_{26}^3}{C_{42}^3} = 0,226$

3 - On considère la fonction f de la variable réelle définie sur $[1 ; 20]$ par $f(x) = -2x^3 + 42x^2$.

Etudier les variations de f .

On exprime la dérivée de la fonction f qui s'écrit ainsi $f'(x) = -6x^2 + 84x = 6x(-x + 14)$. Donc $f'(x) > 0$ sur $[1; 14[$, $f'(14) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]14; 20]$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $[1; 14]$ et décroissante sur $]14; 20]$.

4 - Dans cette question, on suppose que n appartient à A (défini dans la question 1) et on note $P(n)$, la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a) Déterminer $P(n)$.

A est l'ensemble des entiers appartenant à l'intervalle $[1 ; 20]$ d'après la question 1. Et donc,

$$P(n) = \frac{C_n^1 \times C_n^1 \times C_{42-2n}^1}{C_{42}^3} = \frac{n \times n \times (42 - 2n)}{C_{42}^3} = \frac{42n^2 - 2n^3}{C_{42}^3} = \frac{f(n)}{11480} \text{ car } n \text{ appartient à } [1 ; 20].$$

b) En utilisant les résultats obtenus à la question 3, déterminer la valeur n_0 de n pour que $P(n)$ soit maximum.

Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut.

D'après la question 3, f atteint son maximum sur $[1 ; 20]$ en $x=14$. Donc D'après a, $P(n)$ sera maximum

pour $n=14$ car 14 appartient à l'ensemble A et $P(n_0) = \frac{f(14)}{11480} = \frac{42 \times 14^2 - 2 \times 14^3}{11480} = 0,239$.

EXERCICE N°2

Pour tout naturel n , on désigne par U_n , le nombre d'individus (exprimé en milliards) dans le monde en l'an $1990+n$:

$U_0=5$ (en 1990), U_1 (en 1991), U_n (en $1990+n$),...

On suppose que le taux annuel de croissance du nombre d'individus est constant.

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} = K$$

En 1990, ce taux K est égal à 0,017.

1 – Démontrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n .

Utilisons la formule du taux annuel de croissance. On a $\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} = K$ ce qui équivaut à

$U_{n+1} - U_n = K \cdot U_n \Leftrightarrow U_{n+1} = (K+1) \cdot U_n$. Donc U_n est bien une suite géométrique de raison $K+1$ et de premier terme $U_0=5$. Le terme général de la suite est donc $U_n = (K+1)^n \cdot U_0 = 5 \times 1,017^n$.

2) a) Quel serait l'effectif de la population mondiale en 2000 ? en 2010 ? en 2020 ?

L'effectif de la population en 2000 est donné par U_{10} (car $2000=1990+10$). Or $U_{10} = 5 \times 1,017^{10} \approx 5,92$, donc la population en 2010 serait de **5,92 milliards**.

De la même façon, on obtient pour 2010 une population de $U_{20} = 5 \times 1,017^{20} \approx 7$ milliards d'habitants et pour 2020 une population de $U_{30} = 5 \times 1,017^{30} \approx 8,29$ milliards d'habitants.

b) Au bout de combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublé à partir de 1990 ?

La population aura doublé lorsqu'on aura $U_n = 2 \cdot U_0$, c'est-à-dire $5 \times 1,017^n = 2 \times 5$, ce qui nous donne $1,017^n = 2 \Leftrightarrow n \times \ln 1,017 = \ln 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,017} \approx 41,11$. Donc la population aura doublé au bout de 42 années à partir de 1990.

c) Si l'on suppose le taux de croissance constant depuis l'aube de l'humanité, quand le 1^{er} couple d'êtres humains vécut-il sur terre ?

On va utiliser la formule de U_n avec n négatif, cette formule a bien un sens. On veut $U_n = 2 \times 10^{-9}$ car U_n s'exprime en milliards d'individus. On a alors $5 \times 1,017^n = 2 \times 10^{-9}$ et en utilisant \ln , on obtient $\ln(5 \times 1,017^n) = \ln(2 \times 10^{-9}) \Leftrightarrow \ln 5 + n \cdot \ln 1,017 = \ln(2 \times 10^{-9}) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(2 \times 10^{-9}) - \ln 5}{\ln 1,017}$, ce qui fait $n \approx -1283,70$. Donc le 1^{er} couple vécut 1283 ans avant 1990, soit en l'an 707.

3-Étudions l'évolution de la population mondiale par période de 20 ans. On appelle V_0 le nombre d'individus dans le monde en 1990, V_1 celui en 2010, V_2 celui en 2030,... V_n le nombre d'individus en $1990+20n$.

a) Montrer que pour tout entier n : $V_{n+1} = q \cdot V_n$ et donner la valeur approchée décimale par défaut de q à 10^{-2} près.

On a $V_n = U_{20n}$ par définition de V_n . Donc $V_{n+1} = U_{20(n+1)} = 5 \times 1,017^{20(n+1)} = 5 \times 1,017^{20n} \times 1,017^{20}$ et par suite $V_{n+1} = U_{20n} \times 1,017^{20} = V_n \times 1,017^{20}$. Donc on a bien $V_{n+1} = q \cdot V_n$ avec $q = 1,017^{20} \approx 1,40$.

b) Calculer le taux de croissance pour une période de 20 ans.

Pour calculer le taux de croissance sur 20 ans, on utilise la même formule que pour le taux annuel en remplaçant U_n par V_n , soit $\frac{V_{n+1} - V_n}{V_n} = \frac{q \cdot V_n - V_n}{V_n} = q - 1 = 0,40$.

EXERCICE N°3

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

1 – Déterminer les réels a, b et c.

On commence par réduire au même dénominateur les termes du 2^{ème} membre de l'égalité, ce qui donne $ax + b + \frac{c}{x - 2} = \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2} = \frac{ax^2 + (b - 2a)x + (c - 2b)}{x - 2}$. Pour avoir l'égalité, il faut

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 \\ c - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 + 2a = 3 \\ c = 1 + 2b = 7 \end{cases}. \text{ Donc } f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = x + 3 + \frac{7}{x - 2}.$$

2 – Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$

On va utiliser l'expression de f trouvée à la question précédente :

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x + 3 + \frac{7}{x - 2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 7 \cdot \ln|x - 2| \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} + 3 + 7 \cdot \ln|-1| - 7 \cdot \ln|-2| = \frac{7}{2} - 7 \cdot \ln(2) \approx -1,35$$

EXERCICE N°4

Un serrurier dispose d'un trousseau de dix clés dont une seule est la bonne et essaie d'ouvrir une porte. On suppose les clés indiscernables et les essais aléatoires.

1 – Il essaie les clés en remettant à chaque fois la clé essayée dans le trousseau. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au quatrième essai seulement ?

S'il ouvre la porte au quatrième essai, c'est qu'il a échoué 3 fois. Donc c'est la probabilité de piocher trois fois une des 9 mauvaises clés et de piocher une fois la bonne, soit

$$IP = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{729}{10000} = 0,0729.$$

2 – Il met en œuvre une autre méthode qui consiste à écarter la clé essayée et à poursuivre les essais avec les clés restantes. On désigne par X le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

On a un tirage sans remise et non simultané. Déterminer la loi de probabilité de X revient à déterminer $IP(X=k)$ pour $k \in [1; 10]$. Pour $X=1$, on a une chance sur dix de tomber sur la bonne clé, donc $IP(X=1) = 1/10$. Ensuite, pour $k=2$, on tire d'abord une mauvaise clé, on a neuf chances sur dix, puis la

bonne clé, donc une chance sur neuf clés restantes. Soit $IP(X=2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$. De la même façon, on

obtient $IP(X=3) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$ et ainsi de suite... On a donc une loi équiprobable, et $IP(X=k) = 1/10$ pour tout $k=1, 2, \dots, 10$.

L'espérance de cette variable aléatoire est $IE(X) = \sum_{k=1}^{10} k \times IP(X=k) = \sum_{k=1}^{10} k \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{11 \times 10}{2} = 5,5$ et

sa variance est égale à $Var(X) = IE(X^2) - (IE(X))^2$

Or $IE(X^2) = \sum_{k=1}^{10} k^2 \times IP(X=k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{11 \times 10 \times 21}{6} = 38,5$, donc $Var(X) = 38,5 - 5,5^2 = 8,25$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{x}{3}}$ de courbe représentative C définie sur $[0; +\infty[$.

1 – a) Calculer la dérivée de f , f' .

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et sa dérivée est égale à

$$f'(x) = 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times e^{-\frac{x}{3}} = 2x - e^{-\frac{x}{3}}.$$

b) Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.

On a $x_1 < x_2 \Rightarrow -\frac{x_1}{3} > -\frac{x_2}{3} \Rightarrow e^{-\frac{x_1}{3}} > e^{-\frac{x_2}{3}} \Rightarrow -e^{-\frac{x_1}{3}} < -e^{-\frac{x_2}{3}}$ car \exp est une fonction strictement croissante. De plus, $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$. Donc, en sommant les deux expressions, on a $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - e^{-\frac{x_1}{3}} < 2x_2 - e^{-\frac{x_2}{3}}$ et f' est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

La limite de f' en $+\infty$ est $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^{-\frac{x}{3}} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{3}} = 0$.

c) Dédire de ce qui précède l'existence d'un nombre réel unique $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.

On a $f'(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ et f' est continue strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, $f'(0,4) = 2 \times 0,4 - e^{-\frac{0,4}{3}} = -0,075$ et $f'(0,5) = 2 \times 0,5 - e^{-\frac{0,5}{3}} = 0,154$, donc cette unique solution est dans l'intervalle $[0,4; 0,5]$.

d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.

D'après les résultats des questions précédentes (sens de variation et zéros de f'), on en déduit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \alpha[$, $f'(\alpha) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$.

2 – a) Donner la limite de f en $+\infty$.

La limite de f en $+\infty$ est $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 + 3e^{-\frac{x}{3}} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{3}} = 0$.

b) Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$. Quelle conclusion graphique peut-on en tirer ? (on désigne par P la courbe d'équation $y = x^2 - 3$)

On a $f(x) - (x^2 - 3) = 3e^{-\frac{x}{3}} > 0$ d'après la propriété de la fonction exponentielle.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-\frac{x}{3}} = 0$. Donc la courbe C est au-dessus de la courbe P et P est une asymptote en $+\infty$ de la courbe C .

3 – a) Dresser le tableau de variation de f .

On connaît le signe de f' sur $[0; +\infty[$, donc on peut en déduire le tableau de variations de f suivant :

x	0	α	$+\infty$
signe de f'	—	0	+
Variation de f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique non nulle a qui appartient à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et que $0,8 \leq a \leq 0,9$.

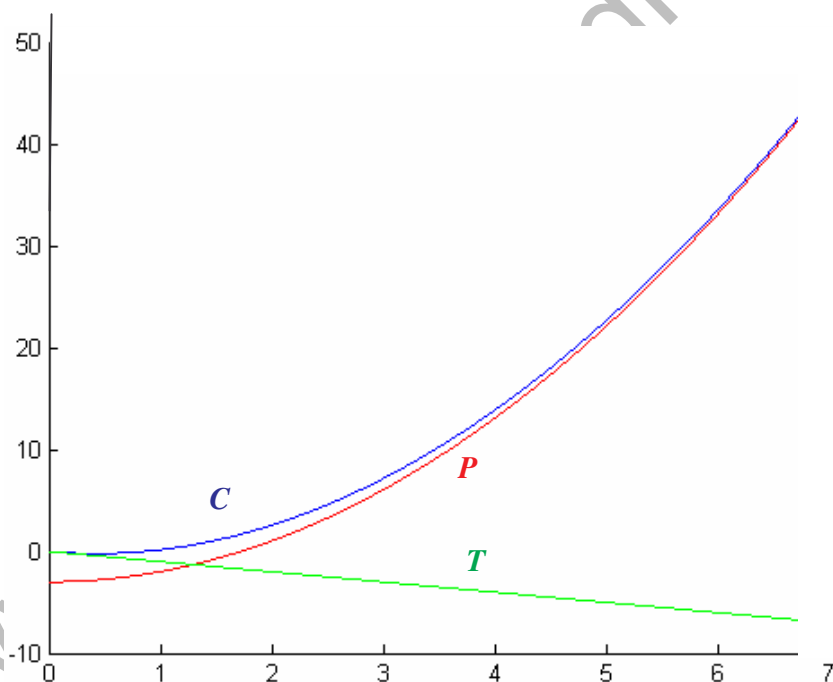
On sait que f est continue strictement décroissante sur $[0; \alpha]$ et que $f(0)=0$. Donc $f(\alpha) < 0$. Comme f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution a telle que $f(a)=0$. De plus, on a $f(0,8) \approx -0,06$ et $f(0,9) \approx 0,03$; alors on a $0,8 \leq a \leq 0,9$.

c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

En utilisant le tableau de variation et la question précédente, on en déduit que $f(x) < 0$ sur l'intervalle $[0; a[$; $f(a)=0$ et $f(x) < 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

4 – Tracer dans le repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 1,5 cm) les courbes P et C . Il conviendra de préciser la tangente à C au point d'abscisse 0.

$f'(0) = -1$ et $f(0)=0$ on a la tangente T à C en 0 a pour équation $y = -x$.



5 –a) Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x^2 - 3)] dx$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x^2 - 3)] dx = \int_0^\lambda 3e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[-9e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^\lambda = -9e^{-\frac{\lambda}{3}} + 9$$

b) Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

$I(\lambda)$ représente la surface entre les courbes P et C lorsque x varie sur l'intervalle $[0 ; \lambda]$.

c) Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -9e^{-\frac{\lambda}{3}} + 9 = 9$$

www.concoursadministratifs.net