

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NOTE D'OBSERVATIONS A SERVIR PAR LE CORRECTEUR

1) Résultats justes mais calculs faux pour les exercices et questions suivants:

- néant

2) Résultats justes mais démonstrations absentes ou insuffisantes pour les exercices et questions suivants :

- exercice 1 - absence de la délimitation du périmètre de n.

3) Résultats justes mais incomplets pour les exercices et questions suivants :

- néant

4) Démonstration, calculs et résultats faux pour les questions et exercices suivants :

- exercice 4 - 3b - calcul de la dérivée faux - calcul de la limite de $f(x)$ en 2 moins faux - variations de f fausses.
- exercice 3 - 1 - calcul de I_p 1 faux.

5) Démonstrations et calculs justes mais résultats faux pour les exercices et questions suivants :

- néant

6) Absence de réponses aux exercices et questions suivants :

- exercice 5 en totalité
- exercice 3 - questions 2 et 3
- exercice 4 - questions 2b - 3d - 4

7) Observations générales (à servir obligatoirement) :

Ce qui est fait est en général plutôt bien fait. Les exercices 1 et 2 en sont des exemples.

Toutefois, un manque de rapidité indéniable dans la réalisation des exercices n'a pas permis de réaliser la totalité des questions et a ainsi limité le nombre de points maximum qu'il était possible d'obtenir.

Sur la présentation, c'est plutôt correct. Un manque de mise en valeur des résultats est toutefois à noter.

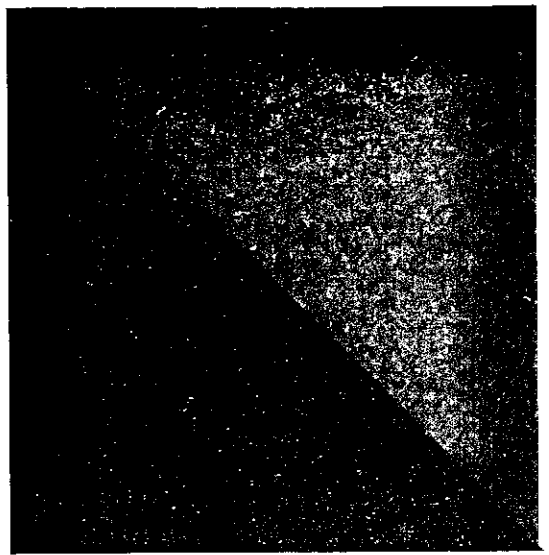


CONCOURS : de contrôleur du Trésor 2005

ÉPREUVE : d'Admissibilité

OPTION : Mathématiques

DATE : 09/11/05



RÉSERVÉ
AU CORRECTEUR

Numéro de copie

449

NOTE SUR 20

10,25

Exercice n°1 :

On note $C(0)$ le chiffre d'affaires en millions d'euros réalisé en 1984 : $C(0) = 2$.

La progression du chiffre d'affaires est de 15% par an.

1) a)

On a donc :

$$C(1) = C(0) + C(0)(0,15)$$

$$C(1) = C(0) \times (1 + 0,15)$$

$$C(1) = C(0) \times 1,15$$

$$C(1) = 2,30$$

De même on a :

$$C(2) = C(1) \times 1,15$$

$$C(2) = 2,645$$

$C(n)$ est donc une suite géométrique de premier terme $C(0) = 2$ et de raison $r = 1,15$

b) On peut donc écrire :

$$C(n) = C(0) \times (1,15)^n$$

$$C(2) = 2 \times (1,15)^2$$

Le chiffre d'affaire en 1994 est :

$$C(10) = 2 \times (1,15)^{10}$$

$$C(10) = 8,09 \text{ à } 10^{-2} \text{ près on a :}$$

$$C(10) = 8\,091\,15\,472 \text{ euros}$$

2) a)

$$\text{On a: } C(11) = C(10) - (C(10) \times 0,15)$$

$$C(11) = C(10) \times (1 - 0,15)$$

$$C(11) = 8,09 \times 0,85$$

$$C(11) = 6,87 \text{ à } 10^{-2} \text{ près ou}$$

$$C(11) = 6\,877\,448\,151 \text{ euros}$$

b)

Pour $n \geq 11$, $C(n)$ est une suite géométrique de premier terme $C(10)$ et de raison $r_2 = 0,85$.

On peut donc écrire:

$$C(n) = C(10) \times (0,85)^{n-10} = 8,09 \times (0,85)^{n-10}$$

c) Pour que le chiffre d'affaires soit redevenu égal ou inférieur à celui de 1984 il faut que:

avec $n \geq 11$:

$$8,09 \times (0,85)^{n-10} \leq C(0)$$

$$\Leftrightarrow 8,09 \times (0,85)^{n-10} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow (0,85)^{n-10} \leq \frac{2}{8,09}$$

La fonction \ln étant strictement croissante:

$$(0,85)^{n-10} \leq \frac{2}{8,09}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,85)^{n-10} \leq \ln 0,23$$

$$\Leftrightarrow (n-10) \ln 0,85 \leq \ln 0,23$$

$$\Leftrightarrow n-10 \leq \frac{\ln 0,23}{\ln 0,85} \quad \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 0,23}{\ln 0,85} + 10$$

$$\Leftrightarrow n \leq 19,04$$

n étant un entier naturel, on obtient $n = 19$.

Le chiffre d'affaires sera redevenu égal au inférieur à celui de 1984 en $(1984 + 19) = 2003$.

On vérifie:

$$C(19) = 8,09 \times (0,85)^9$$

$$C(19) = 1,87$$

$$\text{On a bien } C(19) < C(0)$$

Tous les résultats sont donnés avec une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice n°2:

1)

$$\text{On a: } p_{n+1} - p_n = x$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} = p_n + x$$

On peut donc dire que les nombres p_n forment une suite arithmétique de premier terme $p_1 = \frac{1}{15}$ et de raison x .

On a donc:

$$p_2 = p_1 + x \Leftrightarrow p_2 = \frac{1}{15} + x$$

$$p_3 = p_2 + x \Leftrightarrow p_3 = \frac{1}{15} + x + x \Leftrightarrow p_3 = \frac{1}{15} + 2x$$

Et on peut aussi écrire:

$$p_n = p_1 + (n-1)x$$

$$2) s = \sum_{i=1}^6 p_i = \frac{6}{2} (p_1 + p_6) = 3 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + 5x \right)$$

$$s = \sum_{i=1}^6 p_i = \frac{6}{15} + 15x = \frac{2}{5} + 15x$$

On sait que cette somme s doit être égale

à 1 car $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ forment

l'ensemble des tirages (2 l'univers des possibles)
et donc $p(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

D'où : $\frac{3}{5} + 15x = 1$

$$\Leftrightarrow 15x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{75}$$

On a donc :

$$p_2 = \frac{1}{15} + \frac{3}{75} = \frac{8}{75} ; p_3 = \frac{1}{15} + \frac{8}{75} = \frac{11}{75}$$

$$p_4 = \frac{1}{15} + \frac{9}{75} = \frac{14}{75} ; p_5 = \frac{1}{15} + \frac{12}{75} = \frac{17}{75}$$

$$p_6 = \frac{1}{15} + \frac{15}{75} = \frac{20}{75} = \frac{4}{15}$$

3)

Les tirages de nombres premiers sur :

$P = \{1; 2; 3; 5\}$. Les événements qui
constituent P sont 2 à 2 disjoints.

$$p(P) = p_1 + p_2 + p_3 + p_5 = \frac{1}{15} + \frac{8}{75} + \frac{11}{75} + \frac{17}{75}$$

$$p(P) = \frac{41}{75}$$

$$p(P) \approx 0,55$$

4)

Les tirages de nombres pairs sur :

$Q = \{2; 4; 6\}$. De la même façon que
pour la question 3), on a :

$$p(Q) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{8}{75} + \frac{14}{75} + \frac{4}{15} = \frac{42}{75} = \frac{14}{25}$$

$$p(Q) \approx 0,56$$

Exercice n° 4

1) a)

On sait que : $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ On reconnaît donc dans la formule de $P(x)$, le développement de $(a-b)^3$ avec $a = x$ et $b = 1$.On sait ^{donc} que $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

D'où :

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x-1)^3 - 2$$

b)

En notant P' dérivée de P , on a :

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$P'(x) = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$P'(x) = 3(x-1)^2$$

 P' est un polynôme du second degré dont la racine unique est $x = 1$.On sait donc que $P'(1) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) \geq 0$.On peut donc en déduire que P est croissante sur \mathbb{R} . $P'(x)$ ne s'annulant que pour une valeur isolée de \mathbb{R} , on peut même dire que P est strictement croissante sur \mathbb{R} . P établit donc une bijection de son ensemble de définition vers l'ensemble image \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe un antécédent et un seul $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$P(2,2) = (1,2)^3 - 2 = -0,272$$

D'après ce qui précède et comme P , croissante, conserve le sens de l'inégalité, on a :

$$\text{si } x \leq 2,2 \text{ alors } P(x) \leq P(2,2)$$

$$\Leftrightarrow P(x) \leq -0,272$$

2)

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)^2 \geq 0$$

La fonction $f(x)$, comme fonction composée de $P(x)$ et d'une fonction positive a le même sens de variation.

Donc, pour les raisons vues dans la question 1), on peut écrire pour $x \in \mathbb{R} - \{2\}$:

$$\text{si } x \leq 2,2 \text{ alors } f(x) \leq \frac{f(x)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \text{si } x \leq 2,2 \text{ alors } f(x) \leq \frac{0,2}{(x-2)^2}$$

3)a)

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + x^2 + 4x - 4x + 3x + 4 - 6 + 1}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 4) + 3x - 6 - 1}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)^2 + 3(x-2) - 1}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = x+1 + \frac{3}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

b)

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{-1}{(x-2)^2} \right) - \left(\frac{-2x+4}{(x-2)^4} \right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2x-4}{(x-2)^4}$$

On a vu que $f(x)$ avait le même sens de variation que $P(x)$: elle est donc croissante.

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-2} = 0^+$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0^+$$

D'après le théorème sur les limites d'une somme, on a donc:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De même:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-2} \right) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

$$\text{D'où: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

On a aussi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} P(x) = -1$$

$$\text{or } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)^2 = 0^+$$

$$\text{d'où: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

$$\text{De même on peut déduire: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - (x+1) = \frac{3}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

On pose $g(x) = f(x) - (x+1)$

On a d'après les résultats de la question b:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^-$$

On en déduit que Δ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$ et $-\infty$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 = 1(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) = 1 \quad (x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

Le point d'intersection I de Δ et \mathcal{C} a pour coordonnées: $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$ et on a $g(x) > 0$ si $x > \frac{7}{3}$.

Donc pour $x \in (-\infty; 2[\cup] \frac{7}{3}; +\infty)$, \mathcal{C} est en dessous de Δ et pour $x \in] \frac{7}{3}; 2)$, Δ est en dessous de \mathcal{C} .

Exercice n°3:

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p (1-x)^0 dx = \int_0^1 x^p dx$$

NOMBRE
D'INTERCALAIRES
(pages supplémentaires)

1

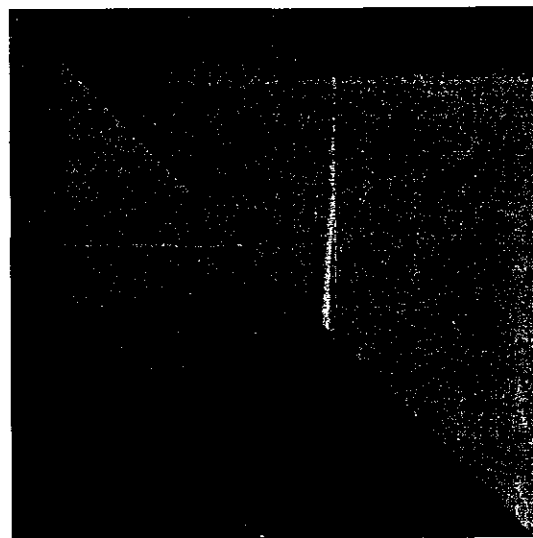


CONCOURS : Contrôle de Trésor Extérieur 2005

ÉPREUVE : d'Admissibilité

OPTION : Mathématiques

DATE : 09 | 11 | 05



RÉSERVÉ
AU CORRECTEUR

Code correcteur

Numéro de copie

NOTE SUR 20

Exercice n°3 (suite)

$$I_{p,0} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$\begin{aligned} I_{p,1} &= \int_0^1 x^p (1-x) dx = \int_0^1 x^p - x^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{p+1} - \left[\frac{x^{p+2}}{p+2} \right]_0^1 = \frac{-p}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$