

Epreuve de Mathématiques (Epreuve n°3)

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter.

EXERCICE N° 1

On lance simultanément deux dés cubiques, l'un est rouge, l'autre est blanc. Les faces de chacun de ces dés sont numérotées de 1 à 6.

Un couple de nombres apparaît donc à chaque lancer. On suppose que tous les résultats sont équiprobables.

On désigne par E l'événement « la somme de deux nombres est supérieure ou égale à 10 ».

- 1 - Montrer que la probabilité de E est égale à $\frac{1}{6}$.
- 2 - On lance ces deux dés dix fois de suite. Quelle est la probabilité que l'événement E soit réalisé exactement trois fois (à 10^{-3} près) ?
- 3 - On lance les dés n fois de suite.
 - a) Montrer que la probabilité P_n que E soit réalisé au moins une fois est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
 - b) Quel est le nombre minimum de lancers pour que cette probabilité P_n soit supérieure à 0,9 ?
 - c) Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE N° 2

Soit les suites numériques (V_n) et (W_n) définies, pour tout n appartenant à \mathbb{N} , par :

$$(V_n) : V_0 = -\frac{4}{3} ; V_{n+1} = \frac{3}{4} V_n - 1$$

$$(W_n) : W_n = 3 V_n + 12$$

- 1 - Démontrer que la suite (W_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
- 2 - Exprimer (V_n) en fonction de n .
- 3 - Calculer la somme de (W_n) .

EXERCICE N° 3

1 - Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^{*+} par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln x$$

a) Donner le sens de variation de $f(x)$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a telle que $3 < a < 4$.

c) Dédire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]0; a[$ et $]a; +\infty[$

2 - On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre a défini au 1-b).

a) Soit g la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^{*+} par :

$$g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln x$$

Donner le sens de variation de g .

Montrer que l'image, par g , de l'intervalle $[3; 4]$ est contenue dans l'intervalle $[3; 4]$

Montrer que a est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

b) On considère la suite U , définie sur \mathbb{N} , par : $U_0 = 3$ et pour tout entier n , par $U_{n+1} = g(U_n)$

Démontrer par récurrence que, pour tout n , on a : $3 \leq U_n \leq 4$

Montrer que, pour tout x de $[3; 4]$: $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{12} |U_n - a|$

En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} : $|U_n - a| < \frac{1}{12^n}$

En déduire la limite de U quand n tend vers $+\infty$, ainsi qu'une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

3 - On considère la fonction numérique h , définie sur \mathbb{R}^{*+} par :

$$h(x) = x + 1 - \left(\frac{31}{16}\right) x^2 - \frac{1}{8} x^2 \ln x$$

a) Montrer que pour tout x strictement positif, $h'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$

En déduire le signe de $h'(x)$ sur chacun des intervalles $]0; \frac{1}{a}[$ et $]\frac{1}{a}; +\infty[$

b) Etudier les variations de h ainsi que ses limites en $+\infty$ et en 0.

c) Construire la courbe représentative (C) de h , dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; i, j)$, unité 2 cm.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE N° 4

Un internaute a pour habitude de composer un mot de passe à huit caractères dont les cinq premiers sont des lettres et les trois derniers sont des chiffres.

- 1 - On suppose que les cinq lettres sont distinctes. Combien peut-on composer de mots de passe différents qui :
 - a) commencent par A ?
 - b) commencent par AB ?
 - c) contiennent A et B ?
 - d) contiennent la lettre A et finissent par 567 ?
- 2 - On suppose que les cinq lettres ne sont plus distinctes. Combien peut-on composer de mots de passe différents qui :
 - a) commencent par AB ?
 - b) contiennent au moins quatre fois la lettre A ?

EXERCICE N° 5

On a étudié le revenu annuel moyen R_i et la consommation moyenne C_i des cadres supérieurs des grandes entreprises françaises durant une période de six ans.

Les informations exprimées en milliers d'euros sont retracées dans le tableau ci-dessous :

Année i	R_i	C_i
1	72	67
2	75	72
3	75	70
4	76	73
5	78	75
6	80	75

- 1 - Présenter le calcul de l'équation de la droite d'ajustement obtenue en appliquant la méthode des moindres carrés.
- 2 - Calculer le coefficient de corrélation des deux séries R_i et C_i .
Que doit-on en conclure ?