

MATHÉMATIQUES

Mathématiques 022

DROIT ADMINISTRATIF

Code-matière 022

La notion de travail public (*stricto sensu*).

On se place dans l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels.

On note  $I, A$  et  $O$  les fonctions polynômes définies par :

$$I(x) = 1, \quad A(x) = x \quad \text{et} \quad O(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

On considère une suite  $(P_n)$  de polynômes définies par :

$$P_0 = I, \quad P_1 = A \quad \text{et} \quad P_{n+1} = AP_n - P_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } n \geq 1.$$

1. a. Déterminer le degré du polynôme  $P_n$ .  
b. Calculer  $P_n(0)$  en fonction de  $n$ .  
c. Soit  $x$  un réel.  
i. On suppose que  $|x| < 2$  et on pose alors  $x = 2 \cos \theta$  ou  $x = 2 \sin \theta$  où  $\theta \in ]0, \pi[$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \neq 0$ , on a :  $P_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ .  
ii. On suppose que  $|x| = 2$ .  
Déterminer  $P_n(x)$  en fonction de  $n$ .  
c. On suppose que  $|x| > 2$ .  
Montrer qu'il existe un unique réel  $t$  tel que :  $x = \frac{t + t^{-1}}{2}$  où  $|t| > 1$ .  
Déterminer  $P_n(x)$  en fonction de  $t$  et  $n$  et préciser le signe de  $P_n(x)$  selon la valeur de  $n$ .  
2. Déterminer les valeurs des réels  $x$  tels que  $P_n(x) = 0$ .  
3. Montrer que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $P'_n = P_{n-1}$ ,  $P_{n+1} = I$ .  
4. Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $n > 1$  et  $p > 0$ . Déterminer  $P_{n+p}$ .

Tournez la page S.V.P.

Tournez la page S.V.P.