

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

- I -

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce plan, on appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I.1. Étude de la fonction f .

I.1.a. Préciser le domaine de définition de f , noté \mathcal{D}_f .

I.1.b. Que peut-on dire de la parité de f ? En déduire le domaine \mathcal{D} sur lequel on peut restreindre l'étude de f .

I.1.c. Montrer que f est dérivable en tout point de \mathcal{D} et déterminer l'expression de sa dérivée f' . En déduire le sens des variations de f sur \mathcal{D} .

I.1.d. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et bâtir son tableau de variations.

I.1.e. Établir l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point O .

I.1.f. Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en faisant apparaître les éléments qui facilitent sa construction (asymptotes, tangente en O , ...).

I.2. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} . Donner le domaine de définition de f^{-1} et déterminer son expression.

I.3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = \alpha$ où α est un paramètre réel. En particulier, préciser les solutions à cette équation dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$.

I.4. En remarquant que f est de la forme $\frac{u'}{u}$, déterminer la valeur de l'aire sous la courbe \mathcal{C} délimitée entre l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

- II -

Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

- III -

Une urne contient trois boules bleues et sept boules vertes indiscernables au toucher.

III.1. On tire simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité des événements E_1 , E_2 et E_3 suivants :

- E_1 : « On obtient au plus une boule verte » ;
- E_2 : « On obtient exactement une boule verte » ;
- E_3 : « On obtient au moins une boule verte ».

III.2. Un « jeu » consiste à tirer une boule de l'urne et à la remettre dans l'urne après avoir noté sa couleur.

On participe à trois *jeux* successifs.

On désigne par Ω l'univers des possibles et par N la variable aléatoire qui, à un résultat, associe le nombre de tirages d'une boule bleue.

III.2.a. Quels sont les éléments de $N(\Omega)$?

III.2.b. Pour tout k dans $N(\Omega)$, calculer la probabilité $P(N = k)$ en l'exprimant sous la forme d'un pourcentage. Comment s'appelle la loi de probabilité ainsi bâtie ?

III.2.c. Calculer l'espérance mathématique $E(N)$, la variance $V(N)$ et l'écart-type $\sigma(N)$ de la variable N .

III.2.d. Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition F de la variable N . On rappelle que F est la fonction qui, à tout réel x , fait correspondre $F(x) = P(N < x)$.

- IV -

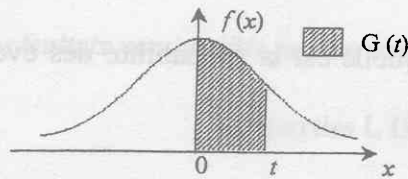
Des études menées sur un échantillon de 400 personnes ont montré que ces personnes dormaient en moyenne 8 heures et 48 minutes par nuit.

IV.1. Peut-on considérer cet échantillon comme un échantillon simple d'une grande population de personnes qui dormiraient en moyenne 9 heures par nuit avec un écart-type de deux heures et demie ?

IV.2. Dans le cas où cette population est normale et sa moyenne est inconnue, quelles sont les limites de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la moyenne ? Au seuil de 99 % pour la moyenne ?

ANNEXE
au sujet de mathématiques et statistiques

AIRES DE LA COURBE NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



Cette table donne les aires situées en dessous de la courbe normale centrée réduite f entre 0 et $t \geq 0$.

$$P(0 \leq T \leq t) = G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000