

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

*Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.
Les candidats seront jugés sur l'argumentation.*

- I -

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par Γ la restriction de la fonction $x \mapsto \tan x$ à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ et l'on note \mathcal{C}_Γ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I.1. On note Arctan (et l'on prononce « *Arc Tangente* ») la réciproque de la fonction Γ sur $] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$.

I.1.a. Justifier l'existence d'une telle fonction et préciser son domaine de définition. Que peut-on dire de sa continuité, de sa dérivabilité, de sa parité, de son sens de variation et de sa convexité ?

I.1.b. Sans calcul, préciser les limites de la fonction Arctan aux bornes de son domaine de définition ainsi que la pente de la tangente à sa courbe représentative, $\mathcal{C}_{\text{Arctan}}$, au point d'abscisse $x = 0$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I.2. Sur un même graphique, tracer \mathcal{C}_Γ et $\mathcal{C}_{\text{Arctan}}$ en faisant apparaître les éléments caractéristiques qui facilitent leur construction (asymptotes, tangentes particulières...).

I.3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note $\text{Arctan}^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction Arctan .

I.3.a. En écrivant $\forall x \in \mathbb{R}, \Gamma(\text{Arctan} x) = x$, trouver l'expression de $\text{Arctan}^{(1)}$, dérivée première de la fonction Arctan .

I.3.b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, justifier l'existence de la fonction $\text{Arctan}^{(n)}$.

Démontrer alors que pour tout réel x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\text{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où P_n est un polynôme de degré $n-1$. En particulier, donner l'expression en fonction de n du coefficient multiplicatif du terme de plus haut degré de P_n .

I.3.c. Comparer, pour tout réel x non nul, les dérivées des fonctions $x \mapsto \text{Arctan} x$ et $x \mapsto \text{Arctan} \frac{1}{x}$. En déduire, suivant le signe de x , une relation entre $\text{Arctan} x$ et $\text{Arctan} \frac{1}{x}$.

I.4. On s'intéresse maintenant à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{\text{Arctan}}$.

I.4.a. En utilisant le tracé de la courbe \mathcal{C}_f , donner la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \text{Arctan} x \, dx$.

I.4.b. Retrouver ce résultat à l'aide d'une intégration par parties.

I.5. À partir de l'expression de la fonction $\text{Arctan}^{(1)}$, trouver le développement en série entière de la fonction Arctan et en déduire la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- II -

On considère les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \sin \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}} \\ v_0 = \tan \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \alpha \in]0; +\frac{\pi}{2}[$$

II.1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

II.2. On se propose de démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

II.2.a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan \frac{\alpha}{2^n}$.

II.2.b. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

II.2.c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. Montrer qu'elles convergent vers une limite commune et déterminer cette limite.

- III -

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes.

On considère la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & x \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où x est un paramètre réel, et I la matrice identité d'ordre 3.

III.1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A(x)$.

III.2. Discuter, suivant les valeurs du paramètre x :

- si $A(x)$ est diagonalisable lorsque $A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;
- si $A(x)$ est diagonalisable lorsque $A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;
- si $A(x)$ est inversible.

- IV -

Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos^5(\theta) d\theta$.