

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes

- I -

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(\ln désigne la fonction logarithme népérien)

- 1) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.
- 2) Etudier la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- 3) Pour x non nul, calculer $f'(x)$ et exprimer $g(x)$ avec $g(x) = x^2 f'(x)$.
- 4) Etudier les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$, puis montrer que la fonction g s'annule pour une valeur α que l'on calculera à 10^{-3} près en indiquant la méthode utilisée pour déterminer cette approximation.
- 5) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 6) Préciser la position de \mathcal{C}_f , courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé, par rapport à la tangente T à cette courbe à l'origine.
- 7) Représenter la courbe \mathcal{C}_f et la droite T .

- II -

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

- III -

Soit $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ un ensemble de n couleurs distinctes ($n \in \mathbb{N}^*$).

Une urne contient deux boules de couleur c_1 , deux boules de couleur c_2 , ..., deux boules de couleur c_n , soit $2n$ boules dont exactement 2 par couleur de C .

On notera E_n l'ensemble de ces boules.

On vide l'urne en prenant les boules deux par deux, au hasard, avec à chaque tirage une probabilité égale de prendre n'importe quelle paire de boules disponibles.

On dira que deux boules d'une même couleur forment une paire homogène.

- 1) a) De combien de façons différentes peut-on vider l'urne ?
 b) En déduire le nombre h_n de partitions de E_n formées de n parties à deux éléments.
 c) Ecrire h_n sous forme d'un produit d'entiers naturels.
- 2) a) Quelle est la probabilité de prendre ensemble les deux boules de couleur c_1 au premier tirage ?
 b) Quelle est la probabilité de prendre ensemble les deux boules de couleur c_1 au deuxième tirage ?
 c) Quelle est la probabilité de prendre ensemble les deux boules de couleur c_1 au k -ième tirage ?
 d) En déduire la probabilité de prendre ensemble au cours des tirages successifs les deux boules de couleur c_1 .
- 3) Pour la suite, on notera $p_{k,n}$ la probabilité de tirer exactement k paires homogènes au cours des n tirages successifs, et on posera $p_{0,0} = 1$.
 a) Calculer $p_{n,n}$.
 b) Calculer $p_{n-1,n}$.
 c) Calculer $p_{0,2}$ et en déduire $p_{n-2,n}$.
 d) Montrer que : $p_{k,n} = \frac{p_{0,n-k}}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{2(n+1-i)-1}$ avec $k \geq 1$.
- 4) On admet que la suite numérique de terme général $p_{0,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est croissante à partir du quatrième terme, montrer alors que l'on a : $\frac{8}{15} \leq p_{0,n} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 3$.

- IV -

Une machine met du sucre en poudre en sachet. Elle peut être réglée au moyen d'un dispositif gradué en grammes, tel que, lorsque la machine est réglée sur la valeur m , le poids moyen par sachet est égal à m . Le poids par sachet est une variable aléatoire normale de moyenne m et d'écart-type 10 grammes. On veut que dans 98,5 % des cas, les sachets pèsent au moins 1 kilogramme. Sur quelle valeur faut-il régler le dispositif ?