

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I et II sont indépendantes.

I

\mathcal{P} désigne l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions polynômes à coefficients réels de la variable réelle x .

Pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n désigne le sous-espace vectoriel de \mathcal{P} engendré par le système \mathcal{B} avec $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$, on pose $x^0 = 1$.

Pour toute fonction f réelle de la variable réelle x on note $f' = \frac{df}{dx}$, \dots , $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ les dérivées successives de f , si elles existent et on pose $f^{(0)} = f$.

Pour toute application linéaire φ sur \mathcal{P} , on note $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$, $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ et $\varphi^0 = I$, où I est la fonction identité sur \mathcal{P} , et si φ est inversible, on désigne par φ^{-1} l'application réciproque de φ .

Première partie

1°) a) Montrer que l'application φ définie sur \mathcal{P} par : $\varphi(P) = Q$ avec $Q(x) = P\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout réel x , est une application linéaire inversible de \mathcal{P} sur \mathcal{P} et exprimer φ^{-1} .

b) Exprimer $\varphi^n(P)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) D désigne l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction dérivée P' .

a) Montrer que $D \circ \varphi$ est une application linéaire de \mathcal{P} .

b) A-t-on $D \circ \varphi = \varphi \circ D$?

3°) A tout polynôme P de \mathcal{P} , on associe par ψ la fonction $R = \psi(P)$ définie par : $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) Etablir que ψ est définie sur \mathcal{P} et qu'elle est linéaire.

b) Prouver que $\varphi^{-1} \circ \psi = (I - D)^{-1}$, puis que $\psi \circ \varphi^{-1} = (I - 2D)^{-1}$.

c) En déduire que ψ est inversible.

- d) Déterminer l'élément $m_{n,i,j}$ (i -ème ligne, j -ème colonne) de la matrice M_n de ψ_n dans la base \mathcal{B} de \mathcal{P}_n , où ψ_n est la restriction de ψ à \mathcal{P}_n .
- e) Déterminer l'élément $m'_{n,i,j}$ (i -ème ligne, j -ème colonne) de la matrice M_n^{-1} inverse de M_n .

4°) a) Montrer que la recherche des couples (λ, P) ($\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{P}^*$), vérifiant $\psi(P) = \lambda P$ équivaut à celle des couples (μ, P) ($\mu \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{P}^*$), vérifiant la relation (1) $\mu P(x) = P(2x) - 2P'(2x)$.

b) Pour quelle valeur μ_n de μ existe-t'il au moins un polynôme de degré n vérifiant la relation (1) ?

c) On désigne par P_n le polynôme de degré n vérifiant (1) qui est normalisé, c'est à dire dont le

terme de plus haut degré est x^n . On note $P_n(x) = x^n + \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p x^p$. Montrer que l'on a :

$$\alpha_p = \frac{(-1)^{n-p} 2^{n-p} n!}{p! \prod_{i=1}^{n-p} (2^i - 1)} \text{ pour tout entier } p \text{ compris entre } 0 \text{ et } n-1.$$

$$(\text{ Rappel : } \prod_{i=1}^{n-p} (2^i - 1) = (2^1 - 1)(2^2 - 1) \dots (2^{n-p} - 1))$$

Deuxième partie

1°) On donne la série entière de terme général : $w_m(x) = \frac{(-1)^m x^m}{m! (\sqrt{2})^{m^2}}$, $m \in \mathbb{N}$.

On désigne par $F(x)$ la somme, quand elle existe de cette série.

a) Montrer que cette série entière a un rayon de convergence infini.

b) Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \sqrt{2}]$.

c) Montrer que $F(2\sqrt{2}) < 0$.

d) Montrer que la fonction F est dérivable et que l'on a : $F'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{x}{2}\right)$, pour tout x réel.

e) En déduire l'existence et l'unicité du réel α vérifiant $\begin{cases} \alpha \in]0, 2\sqrt{2}[\\ F(\alpha) = 0 \end{cases}$.

2°) a) Montrer que $\ln\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > -\frac{1}{2^{m-1}}$ pour tout entier strictement positif m

(\ln désigne la fonction logarithme népérien)

b) En déduire que la suite (u_m) définie par : $u_0 = 1$ et $u_m = \frac{1}{\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)}$, $m \in \mathbb{N}^*$, converge.

$$(\text{ Rappel : } \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^1}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^m}\right))$$

II

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(t) = \ln(4+t^2-4t\cos\theta)$ où θ est un réel fixé.

1°) Etudier l'ensemble de définition E de f .

2°) a) Démontrer que f est une fonction indéfiniment dérivable sur E .

b) Démontrer que $f^n(t) = \frac{P_n(t)}{(4+t^2-4t\cos\theta)^n}$ où P_n est un polynôme dont on précisera le degré.

3°) a) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur au point t de la dérivée d'ordre $(n+1)$ de la fonction g définie par $g(t) = (4+t^2-4t\cos\theta)f'(t)$.

b) En déduire pour $n \geq 1$ une relation entre $P_n(t)$, $P_{n+1}(t)$ et $P_{n+2}(t)$.