

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II et III sont indépendantes

I

A. Soit f une fonction numérique réelle définie pour tout réel, impaire et admettant une dérivée troisième continue sur \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout réel x non nul, il existe un réel θ_1 tel que :

$$\theta_1 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad f(x) = x f'(0) + \frac{x^3}{6} f'''(\theta_1 x).$$

2. Montrer que l'on peut associer à f au moins une fonction θ telle que :

$$\theta(x) \in]0; 1[\quad \text{et} \quad f(x) = x f'(x \theta(x)).$$

3. On suppose en outre que : $f'''(0) \neq 0$.

Montrer que pour une telle fonction θ , la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers 0 est égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f' à l'ordre 2.

B. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan x$.

1.a. Établir l'existence et l'unicité de la fonction θ définie sur \mathbb{R} par :

si $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ alors $f(x) = x f'(x \theta(x))$ et $\theta(x) \in]0; 1[$,
si $x = 0$ alors $\theta(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$.

Pour cela, on montrera que si $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, alors on a :

$$\theta(x) = \sqrt{\frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x}}.$$

b. Montrer que la fonction θ est continue sur \mathbb{R} et paire.

2.a. Montrer que θ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre 3.

b. Retrouver alors la limite de θ quand x tend vers zéro.

c. Montrer que la fonction θ est dérivable en 0 et que $\theta'(0) = 0$.

3.a. Déterminer $\theta'(x)$ pour $x \neq 0$.

b. Montrer que pour tout x positif, alors $\theta'(x)$ a le même signe que $u(x)$ avec :

$$u(x) = 2(\arctan x)^2 - x \arctan x - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

4. Étudier les variations de $u(x)$.

Pour étudier le signe de $u'(x)$, il pourra être utile d'introduire une fonction auxiliaire dont la dérivée est une fraction rationnelle.

5.a. Étudier les variations de la fonction θ .

b. Construire sa courbe représentative \mathcal{C} dans un plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

II

On définit la fonction numérique réelle φ par : $\varphi(x) = \frac{4 \tan x}{4 + \tan^2 x}$.

1. Étudier les variations de φ .

2. Établir que l'équation « $\varphi(x) = x$ » a une unique solution sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.
On notera α cette solution.

3. On définit une suite réelle par $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, pour tout n de \mathbb{N} .

Démontrer que cette suite est convergente vers α .

III

Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie ; on note : $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$ la forme hermitienne associée.

On considère f une application linéaire sur E et g son adjointe, c'est-à-dire que g est l'unique application linéaire sur E telle que : $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) d'éléments de E .

On suppose, par ailleurs, que $f \circ g = g \circ f$.

1.a. Montrer que f et g ont le même noyau, les mêmes vecteurs propres et des valeurs propres deux à deux conjuguées.

b. Montrer que si x_1 et x_2 sont des vecteurs propres de f associés à deux valeurs propres distinctes, alors $\langle x_1 | x_2 \rangle = 0$.

2. On considère E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ , c'est-à-dire que E_λ est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments x de E vérifiant : $f(x) = \lambda x$.

a. Montrer que si x est un élément de E_λ , alors $f(x)$ et $g(x)$ sont aussi des éléments de E_λ .

b. Montrer que si y , élément de E , est tel que : pour tout $x \in E_\lambda$ on a $\langle x | y \rangle = 0$, alors $f(y)$ et $g(y)$ vérifient la même propriété.