

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Code-épreuve 333

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II et III sont indépendantes

I

A.1. a. Étudier les variations de la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = x \cdot e^{2x}$$

b. Tracer la courbe \mathcal{C}_g représentative de g dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A.2. Étudier les variations de la fonction numérique g_b définie par :

$$g_b(x) = (x + b)e^{2x}, \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$$

A.3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle E l'ensemble des fonctions numériques de la forme :

$$g_{a,b}(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

a. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

b. Montrer que les fonctions $g_{1,0}$ et $g_{0,1}$ constituent une base de E . On appelle B cette base.

c. Exprimer les coordonnées de $g_{a,b}$ dans B .

B. Soit G_n la fonction numérique définie par :

$$G_n(x) = (a_n x + b_n) e^{2x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{et vérifiant } \begin{cases} G_0 = g \\ G'_n = G_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

B.1.a. Exprimer a_n et b_n en fonction de a_{n-1} et b_{n-1} .

b. En déduire qu'il existe une application linéaire ϕ de E telle que :

$$G_n = \phi(G_{n-1})$$

c. Déterminer la matrice M de ϕ relativement à la base B .

B.2. Soit la matrice $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Calculer P^2 , P^3 et P^n .

b. Déterminer M^n .

c. En déduire a_n et b_n en fonction de a_0 et b_0 .

d. Donner l'expression de $G_n(x)$.

B.3. Démontrer que $G_n(x) = \int_{\frac{n}{2}}^x G_{n-1}(t) dt$.

II

Une machine-outil fabrique en série des tubes cylindriques.

1. La longueur X suit une loi normale de moyenne 30 cm et d'écart-type 2 mm.

On considère comme défectueux tout tube dont la longueur diffère de la longueur moyenne de plus de 0,5 cm.

a. Tous les tubes sont contrôlés.

Quel est le taux de rebut de la machine ?

b. Quelle est la probabilité qu'un lot de 100 tubes, prélevé au hasard, contienne au plus trois objets défectueux ?

2. Le fournisseur de la machine-outil a garanti au fabricant des tubes, que le diamètre moyen des pièces fabriquées serait de 20 mm avec une variance de 4 mm.

Pour vérifier si la machine est bien réglée, on prélève régulièrement un échantillon de 100 pièces dont on calcule le diamètre moyen D .

a. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de D .

b. Quelle est la valeur que fournit D , avec une probabilité de 95 % ?

III

Le tableau suivant donne la répartition du nombre de jours avec accidents pour une période de 400 jours dans la partie urbaine d'une région.

| Nombre d'accidents | Nombre de jours |
|--------------------|-----------------|
| 0 | 199 |
| 1 | 140 |
| 2 | 47 |
| 3 | 11 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| 6 et plus | 0 |

- 1.a. Calculer le nombre moyen \bar{x} d'accidents par jour.
- b. Calculer la variance du nombre d'accidents par jour.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f(x) = \lambda \frac{a^x}{x!}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a. Exprimer λ en fonction de a .
 - b. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .
3. On suppose que $\bar{x} = E(X)$.
 - a. Déterminer les valeurs de $f(x)$ pour $x \in [0, 7]$.
 - b. Que peut-on en déduire ?