

DROIT ADMINISTRATIF

Code matière 022

La théorie de la voie de fait en droit administratif français.

ANALYSE ÉCONOMIQUE

Code matière 038

**À quelles conditions ~~une~~ crise sur les marchés financiers
affecte-t-elle l'économie réelle ?**

MATHÉMATIQUES

Code matière 030

L'usage des calculatrices est autorisé

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

-I-

On considère la fonction h de la variable numérique x définie par :

$$h(x) = x - 1 - \ln(x)$$

On note \mathcal{C}_h sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Étudier les variations de h , dresser son tableau de variation, puis tracer son graphe \mathcal{C}_h .
(b) En déduire une majoration de $\ln(x)$ sur \mathbb{R}^+ .
2. Démontrer que si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

-II-

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3 + \cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f et justifier la continuité de f sur cet ensemble.
En déduire que f admet des primitives sur tout intervalle fermé et borné de \mathcal{D} .
2. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_{[0, \alpha]}$ des primitives de f sur $[0, \alpha]$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_{[0, 2\pi]}$ des primitives de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Tournez la page S.V.P.

-III-

Notons \mathcal{E} le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions numériques définies, continue, intégrables et de carrés intégrables sur¹ un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid \int_I |f(t)| dt < +\infty \text{ et } \int_I f(t)^2 dt < +\infty \right\}$$

On notera \mathcal{E}^* , l'ensemble \mathcal{E} privé de la fonction identiquement nulle.

A- Produit scalaire

A-1. Démontrer² que pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ l'intégrale $\int_I |f(t)g(t)| dt$ est finie.

En déduire que l'application $\varphi : (f, g) \rightarrow \int_I f(t)g(t) dt$ est définie sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

A-2. Démontrer que φ est bilinéaire, symétrique.

A-3. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ on a $\varphi(f, f) \geq 0$.

Démontrer que $\varphi(f, f) = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle.

A-4. Soit $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

Montrer que $P : \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow P(\lambda) = \varphi(\lambda f + g, \lambda f + g)$ est un trinôme.

Déterminer le signe de ce trinôme et en déduire que :

$$\varphi(f, g)^2 \leq \varphi(f, f)\varphi(g, g)$$

Démontrer qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Prouver que :

$$\varphi(f + g, f + g) \leq \left(\sqrt{\varphi(f, f)} + \sqrt{\varphi(g, g)} \right)^2$$

B- Géométrie

Toutes les fonctions considérées sont des éléments de \mathcal{E} et pour alléger les notations on pose :

$$q(f) = \varphi(f, f) \text{ et } \|f\| = \sqrt{q(f)} = \sqrt{\varphi(f, f)}$$

B-1. Démontrer que :

$$\varphi(f, g) = 0 \iff \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

On dit alors que f et g sont orthogonales.

B-2. Démontrer que :

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Que peut-on en déduire si f et g sont orthogonales ?

Quelle analogie avec la géométrie euclidienne du plan \mathbb{R}^2 peut-on faire ?

B-3. On suppose que $I = [0, 1]$ et on considère $f \in \mathcal{E}^*$ une fonction non constante.

On considère le sous-espace vectoriel V engendré par f et la fonction \mathbb{I} définie par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \mathbb{I}(t) = 1$$

Démontrer pour tout $g \in \mathcal{E} \setminus V$ il existe un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall h \in V \quad \varphi(g - \lambda f - \mu \mathbb{I}, h) = 0$$

Déterminer λ et μ . On pose $\pi_V(g) = \lambda f + \mu$.

En utilisant une analogie avec la géométrie euclidienne du plan, que peut-on dire de $\pi_V(g)$?

B-4. En utilisant les notations de la question précédente démontrer que pour toute $h \in V \setminus \{\pi_V(g)\}$ on a :

$$\|g - \pi_V(g)\| < \|g - h\|$$

¹ Si I est un intervalle de borne inférieure a et de borne supérieure b on a $\int_I u(t) dt = \int_a^b u(t) dt$

² Indication : on pourra utiliser la deuxième égalité remarquable.

GESTION COMPTABLE

Code matière 041

L'usage des calculatrices est autorisé ainsi que la liste des comptes du Plan comptable général à l'exclusion de toute autre information

Remarques préliminaires :

1. Cette épreuve comporte trois parties distinctes, totalement indépendantes, à traiter dans l'ordre désiré.
2. Toutes les solutions doivent être justifiées.
3. Les montants seront arrondis à l'euro le plus proche.

PREMIÈRE PARTIE

La société VERRERIE DU CENTRE, qui est spécialisée dans la fabrication de flacons de parfum, désire diversifier sa production en fabriquant pour le compte de l'industrie pharmaceutique divers produits en verre (tubes à essai, coupelles, lamelles).

Pour cela, la société doit acquérir une nouvelle chaîne de fabrication. Deux projets d'investissement sont possibles :

	Projet 1	Projet 2
Coût d'acquisition	500 000 €	600 000 €
Capacité maximale de production annuelle	500 000 unités	700 000 unités
Dépenses d'entretien annuelles	40 000 €	50 000 €
Coût de revient unitaire	1 €	0,95 €
Charges fixes de production (hors amortissement)	135 000 €	150 000 €
Charges fixes de distribution	35 000 €	35 000 €

Ces deux investissements ont une durée de vie de cinq ans et sont amortissables selon le système linéaire. La valeur résiduelle est nulle au terme du plan d'amortissement.

Suite à une étude de marché, le prix de vente unitaire prévisionnel est de 2 € et devrait se maintenir sur les cinq années. Le volume prévisionnel des ventes est de 400 000 produits la première année avec une progression de 10 % par an pour les années suivantes.

Remarques :

- Il sera fait abstraction de la TVA.
- Le taux de l'impôt sur les sociétés à retenir est de 33,1/3 %.
- Dans les deux hypothèses, la chaîne de fabrication est livrée et payée le premier jour de la première année.
- On considérera que les recettes sont perçues à la fin de chaque période et les dépenses ainsi que l'impôt sur les sociétés sont acquittées à la fin de chaque période.

Travail à effectuer :

- 1. Déterminer les flux nets annuels de trésorerie générés par chacun des deux projets.**
- 2. Après les avoir définis, calculer pour chacun des deux projets :**
 - a. Le délai de récupération du capital investi;**
 - b. La Valeur Actuelle Nette (VAN) en retenant un taux d'actualisation égal à 10 %;**
 - c. L'indice de profitabilité.**
- 3. Conseiller les dirigeants de la société VERRERIE DU CENTRE sur le choix à opérer.**

DEUXIÈME PARTIE

La société anonyme ECLAIR, grossiste en matériels électriques, possède un unique point de vente situé dans le Rhône. Pour satisfaire une clientèle toujours plus nombreuse et essentiellement basée sur le nord de la Loire, elle souhaite ouvrir un deuxième point de vente sur la région parisienne.

Le montant de cet investissement s'élèverait à 1 200 000 € réglés comptant, soit 200 000 € pour l'acquisition d'un droit au bail et 1 000 000 € pour l'agencement et l'aménagement.

Le financement de ce projet se fera par fonds propres à hauteur de 40 % et un emprunt a été négocié auprès de la banque dont les caractéristiques sont les suivantes :

- montant : 800 000 €;
- taux annuel : 5 %;
- date de mise à disposition des fonds : immédiate;
- mode de remboursement : sur cinq ans par amortissements constants. la première annuité dans un an.

Le chiffre d'affaires prévisionnel hors taxes annuel est estimé à 1 000 000 € la première année. Pour les années suivantes, il est prévu une progression de 10 % par an. Il n'existe pas d'autres produits.

Les charges d'exploitation décaissables sont évaluées à 80 % du chiffre d'affaires.

Les immobilisations seront amorties selon le mode linéaire sur dix ans.

Le taux de l'impôt sur les bénéfices est de 33,1/3 %.

Dès le début de l'activité, le besoin en fonds de roulement d'exploitation à financer représente 36 jours de chiffre d'affaires HT.

Travail à effectuer :

À partir des éléments donnés ci-dessus :

- 1. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.**
- 2. Calculer la capacité d'autofinancement prévisionnelle des cinq premières années.**
- 3. Présenter le plan de financement pour les cinq années.**
- 4. Commenter les résultats obtenus.**

TROISIÈME PARTIE

Le compte de résultat de la société CYCLESUR, spécialisée dans le négoce de vélos, se présente ainsi au 31/12/N :

Achats de marchandises	222 000,00	Ventes de marchandises	500 000,00
Variation des stocks de marchandises	50 000,00		
Autres achats et charges externes	20 000,00		
Impôts, taxes et versements assimilés	8 000,00		
Charges de personnel	80 000,00		
Dotations aux amortissements	10 000,00		
Autres charges	20 000,00		
Total	410 000,00		
Résultat de l'exercice : bénéfice	90 000,00		
Total général	500 000,00	Total général	500 000,00

Travail à effectuer :

1. Complétez le tableau de répartition des charges (cf. Annexe 1).
2. Calculer la marge sur coût variable ainsi que le taux de marge sur coût variable.
3. Quel devrait être le chiffre d'affaires à réaliser pour obtenir un résultat de 150 000 € ?
4. Définir et calculer le seuil de rentabilité en chiffre d'affaires et en quantité, sachant que le prix de vente unitaire moyen d'un vélo est de 500 € HT.
5. Représenter graphiquement le seuil de rentabilité. Qu'en concluez-vous ?