

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III, IV et V sont indépendantes

I

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère \mathcal{E} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

1. Démontrer que toute matrice de \mathcal{E} s'écrit de manière unique sous la forme $aI + bJ + cK$ où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et J et K des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ indépendantes de a, b et c .
2. En déduire que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
- 3.a. Calculer J^2 , JK , KJ , K^2 et montrer qu'elles appartiennent à \mathcal{E} .
b. Montrer que $J^3 = J + I$.
c. En déduire que les matrices J et K sont inversibles, déterminer les matrices inverses respectives notées J^{-1} et K^{-1} , et montrer qu'elles appartiennent à \mathcal{E} .

II

Soit un jeu de bataille navale avec trois escorteurs et un sous-marin. Les trois escorteurs repèrent simultanément le sous-marin.

Soit $P(A)$ la probabilité de l'événement A « le premier escorteur touche mortellement le sous-marin ».

Soit $P(B)$ la probabilité de l'événement B « le deuxième escorteur touche mortellement le sous-marin ».

Soit $P(C)$ la probabilité de l'événement C « le troisième escorteur touche mortellement le sous-marin ».

Quelle est la probabilité $P(E)$ que le sous-marin soit coulé ?

Application numérique : $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,1$.

III

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{k}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur du réel k .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.
3. Pour tout $u > 0$, on pose :

$$A(u) = P[E(X) - u\sigma(X) \leq X \leq E(X) + u\sigma(X)].$$

- a. Montrer que $A(u) \geq \frac{u^2 - 1}{u^2}$.
- b. Exprimer $A(u)$ en fonction de u .

IV

Dans une urne sont placées $n - 1$ boules noires et une boule blanche. Le joueur tire au hasard une boule et la remet dans l'urne, et ceci successivement n fois. Il est gagnant si la boule blanche n'est pas tirée au cours des n parties.

1. Calculer la probabilité p_n pour que le joueur soit gagnant.
2. Montrer que la fonction qui à n associe p_n est une fonction croissante.
3. Le joueur a-t-il intérêt à ce que le nombre de boules soit le plus grand possible ?

On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + \sqrt{\left|1 - \frac{x^2}{\alpha}\right|} \quad \text{où } \alpha \text{ est un paramètre réel strictement positif.}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations, selon les valeurs du réel α .
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et donner l'équation des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et en $-\infty$, selon les valeurs du réel α .
4. Soit a un réel tel que $|a| \neq \sqrt{\alpha}$.
Étudier, au voisinage de a , la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la tangente Δ à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .