

Option C : Mathématiques

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes

I

Pour tout élément n de \mathbb{N}^* , on considère l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées (n, n) à coefficients réels ; soit I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ et $A_n = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } |i - j| \neq 1 \\ a_{ij} = 1 & \text{si } |i - j| = 1 \end{cases}$$

Soit $P_n(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n .

1. Exprimer $P_n(X)$ en fonction de $P_{n-1}(X)$ et de $P_{n-2}(X)$ pour $n > 2$.
2. Montrer que $P_n(2 \cos \theta) = (-1)^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}$ pour θ réel, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et n élément de \mathbb{N}^* .
3. En déduire les racines de $P_n(X)$.

II

1. On considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{\cos nx}{2^n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

On désigne par S_n la somme partielle d'ordre n .

a. Montrer que la série est convergente.

b. Déterminer sa somme en utilisant une expression de S_n .

2. Pour tout entier $n \geq 0$ on considère la fonction $f_n : x \mapsto x \cdot \sin x \cdot e^{-nx}$.

a. Pour quelles valeurs de n , l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est-elle convergente ?

b. Calculer I_n et étudier la convergence de la série de terme général I_n .

III

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - 1 \\ y(t) = (\cos t + 1) \sin t \end{cases}$$

1. Montrer qu'il suffit de construire la portion de la courbe (C) correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et π pour pouvoir obtenir (C).
2. Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, \pi]$.
3. Tracer la courbe (C).

IV

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur \mathbb{R} . Une suite finie de fonctions de E : (f_1, f_2, \dots, f_n) vérifie la propriété P_n [ou, si on veut préciser, la propriété $P_n(x_1, \dots, x_n)$] s'il existe n réels distincts $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j \end{cases} \quad f_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n \quad f_i(x_i) = 1.$$

1. Montrer que si (f_1, \dots, f_n) vérifient la propriété P_n , ils forment un système libre de E .

On appellera E_1 le sous-espace de E ayant pour base cet ensemble.

2. Soit E_2 l'ensemble des fonctions de E s'annulant pour x_1, x_2, \dots, x_n ; donc $g \in E_2 \Leftrightarrow g(x_1) = 0 \dots g(x_n) = 0$.

Montrer que E_2 est un sous-espace de E .

3. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
 (f_1, \dots, f_n) vérifiant $P_n(x_1, \dots, x_n)$;
 E_1 le sous-espace engendré par (f_1, \dots, f_n) ;
 E_2 le sous-espace des fonctions s'annulant pour x_1, \dots, x_n .

Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

(Soit $h \in E$; on cherchera $f \in E_1$, $g \in E_2$ tels que $h = f + g$ et on remarquera d'abord que f est définie de façon unique par des conditions nécessaires.)

4. Soit E' un sous-espace de E .

E'' un vrai sous-espace de E' (c'est-à-dire $E'' \neq E'$).

Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in E''$ et vérifiant la propriété $P_n(x_1, \dots, x_n)$.

Montrer qu'il existe une fonction $u \in E'$ et un réel x_{n+1} tels que $u(x_1) = 0 \dots u(x_n) = 0$, $u(x_{n+1}) = 1$.

[On pourra remarquer qu'il existe dans E' une fonction φ telle que si :

$$\psi = \varphi - \lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_n f_n$$

on a $\psi \neq$ fonction zéro, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

et on utilisera cette fonction ψ pour définir u .]

5. Montrer que si E_1 est un sous-espace de dimension n de E , il existe dans E_1 une base ayant la propriété P_n .