

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II et III sont indépendantes

I

\ln désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

B. 1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) dx \text{ existe.}$$

2.a. Montrer que, pour tout $t \in]-1; +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq e^{-x}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0; \sqrt{n}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right).$$

d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I .

4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ existent et sont égales.

On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_1^n \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J .

- 6.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $K_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$ existe.

b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 7.a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - J_n = K_n - \ln n$.

b. En déduire $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma$.

II

L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$.

On considère :

- $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;
- A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à la ligne i et à la colonne j vaut $a_i \cdot a_j$ pour tout (i, j) de $\{1, 2, 3\}^2$;
- f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans \mathcal{B} .

1. Montrer que \vec{a} est vecteur propre de f , associé à une valeur propre que l'on déterminera.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de f ; donner une telle base et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : pour cette partie II, on pourra écrire :

$A = 'LL$ où L est la matrice ligne $(a_1 \ a_2 \ a_3)$.

III

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ une suite de E ($p \in \mathbb{N}^*$).

On considère l'application $f : E \longrightarrow E$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^p (x/a_i) a_i.$$

Sachant que : $(\exists k \in \mathbb{R}^{**}) (\forall u \in E) \left[\|u\| = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^p (u/a_i)^2 = k \right]$.

Déterminer la nature de f .