

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Code-matière 033

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

I

Dans l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la

matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on note I la matrice unité.

I.1. Montrer que $A^2 = A - I$.

I.2. Si p désigne un entier positif, exprimer A^p en fonction de p et des seules matrices A et I (on pourra distinguer 3 cas).

I.3. On considère à présent les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par la donnée de leur premier terme respectivement u_1 et v_1 et par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = -u_n.$$

En utilisant ce qui précède, calculer u_n et v_n en fonction de u_1 , v_1 et n .

II

L'espace affine euclidien orienté \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'on désigne par \mathcal{C} le cercle «trigonométrique» du plan de cote nulle, qui n'est autre que le cercle de centre O , de rayon 1 et dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$.

À tout point M de coordonnées x et y de ce cercle, on fait correspondre un point M' de \mathcal{E} de coordonnées x , y et z dont la cote z est donnée par :

$$z = x^2 - y$$

Le but de ce problème est de déterminer, si toutefois elles existent, les cotes extrémales de la nappe des points M' , c'est-à-dire les extrema de z .

II.1. À l'aide des multiplicateurs de Lagrange, dresser la liste des points correspondant à d'éventuels extrema de z .

II.2. Exprimer z comme une fonction de la seule variable y . En déduire les extrema de z et vérifier qu'ils font bien partie des points trouvés précédemment.

III

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètres r_0 et c (avec $r_0 > 0$ et $c > 2$) lorsque sa densité de probabilité f est définie sur le corps des réels par :

②.

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq r_0 \\ f(x) = \frac{cr_0^c}{x^{c+1}} & \text{si } x > r_0 \end{cases}$$

12

III.1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.

III.2. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable X en fonction des paramètres r_0 et c .

III.3. Quelles valeurs faut-il donner à r_0 et à c pour que $E(X)$ et $V(X)$ soient toutes deux égales à l'unité ?

III.4. Dans ce cas, quelle est l'expression de la fonction de répartition F de la variable X ?

III.5. Quelles conditions faudrait-il vérifier pour s'assurer que F est bien une fonction de répartition ?

III.6. Peut-on trouver un réel x_0 tel que $P(X < x_0) \geq 95 \%$?

IV

Un restaurant administratif assure deux services pour le déjeuner, le premier à midi, le second à 13 h 00, pour $2n$ personnes. Chaque jour, chacune de ces $2n$ personnes choisit un des deux services et l'on admet que les choix de ces personnes sont tout à fait indépendants les uns des autres. On suppose alors qu'il y a une chance sur deux pour qu'une personne quelconque décide de déjeuner à midi un jour donné.

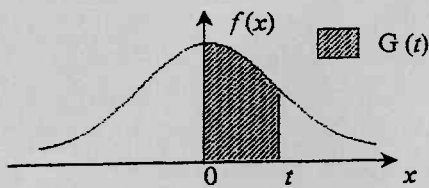
On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de personnes ayant décidé de déjeuner à midi.

IV.1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

IV.2. Si le restaurant administratif peut accueillir M personnes, quelle est la probabilité de ne pas pouvoir accepter tous les gens se présentant à l'un ou à l'autre des deux services ? (On supposera que la loi de X peut être approximée par une loi normale).

IV.3. Dans le cas où 1 000 personnes au total déjeunent à midi ou à 13 h 00, combien doit-il y avoir de places dans le restaurant administratif pour que cette probabilité n'excède pas une chance sur cent ?

AIRES DE LA COURBE NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



Cette table donne les aires situées en dessous de la courbe normale centrée réduite f entre 0 et $t \geq 0$.

$$P(0 \leq T \leq t) = G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$$

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000