

Code centre d'examen 6 20

IDENTIFICATION

Concours : escrime aff régionale IOF  
(interne ou externe, affectation régionale ou nationale)

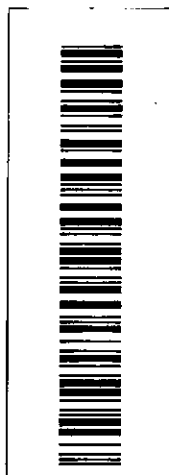
Pour l'emploi de : inspecteur des Impôts

Épreuve n° 3

Matière : 033 mathématiques

Date 19/10/2005

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 1



### À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors du cadre prévu à cet effet, il est interdit de signer sa copie ou de mettre un signe distinctif.

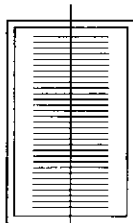
Les étiquettes d'identification ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

### POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres doit traverser la totalité des barres de ce code.

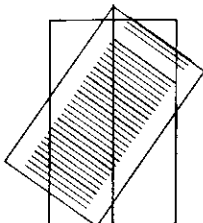
#### EXEMPLE

BON



Axe de lecture  
Code à barres

MAUVAIS



Axe de lecture  
Code à barres

NOTE / 20  
10,00

035  
Numéro du correcteur

042  
Numéro de copie

## exercice IV

1) Soit  $P(0)$  la probabilité de jeter un seul dé.  
On ne lance un seul dé que lorsque les  
3 boules tirées sont de couleur identique.

+ Soit  $P(R_k = 1)$  pour  $k \in \{1; 3\}$  la probabilité que la  
couleur de la boule du  $k$  ième tirage soit rouge.

Les tirages sont successifs, une boule rouge tirée est consignée  
et remplacée par une blanche.

$$\text{Aussi } P(R_1 = 1 \cap R_2 = 1 \cap R_3 = 1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \boxed{0,21}$$

+ Soit  $P(B_k = 1)$  pour  $k \in \{1; 3\}$  la probabilité que la  
couleur de la boule du  $k$  ième tirage soit blanche.

Les tirages sont successifs, toute boule blanche tirée n'est pas  
remise dans l'urne.

$$\text{Aussi } P(B_1 = 1 \cap B_2 = 1 \cap B_3 = 1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$$

$$= \boxed{\frac{1}{120}}$$

Par conséquent,  $P(0) = 0,21 + \frac{1}{120}$

2) Soit  $P(N=k)$  la probabilité pour  $k \in \{1; 12\}$  que le nombre sorti soit  $k$ .

Soit  $P(\bar{0}) = 1 - P(0)$ , la probabilité que deux dés soit jetés.

$$P(\bar{0}) = 1 - 0,21 - \frac{1}{120}$$

Si un dé est jeté,  $P(N=4/0) = \frac{1}{6}$  (déma ppi)

Si deux dés sont jetés,  $P(N=4/\bar{0}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

En effet, il existe 36 possibilités de couples  $(O_1; O_2)$  où  $O_1$  et  $O_2$  sont respectivement les valeurs prises par les variables aléatoires représentant les chiffres indiqués sur chacun des dés. Les couples  $(1; 3)$ ,  $(2; 2)$  et  $(3; 1)$  permettent d'obtenir à un total de 4.

Selon la formule des probabilités totales, il en découle que

$$P(N=4) = \left(0,21 + \frac{1}{120}\right) \times \frac{1}{6} + \left(1 - 0,21 - \frac{1}{120}\right) \times \frac{1}{12}$$

$$\approx \underline{\underline{0,1015}}$$

3) Dans le cas du lancer d'un dé, la probabilité de sortir d'un nombre pair est  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dans le cas du lancer de deux dés, l'événement "sortir de nombre pair" est réalisé quand 2, 4, 6, 8, 10 ou 12 "sortent".

033

(pour les épreuves à option,  
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N° 1

nombre de cas de sortie de 2 :	1
" 4 :	3
" 6 :	5
" 8 :	5
" 10 :	3
" 12 :	1

Sont 18 possibilités au total pour la sortie d'un nombre pair.

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de sortie d'un nombre pair est donc :

$$\frac{1}{2} \left( 0,27 + \frac{1}{120} + 1 - 0,27 - \frac{1}{120} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

III

1) Par définition,  $m = \sum_{i=0}^8 x_i \times n_i$

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8$$

$$m = \frac{0 + 325 + 514 + 357 + 200 + 115 + 12 + 7 + 0}{1000}$$

$$m = \boxed{\frac{3}{2}}$$

2)

3) Variance de la distribution :

$$\begin{aligned} & (229 \times (-\frac{3}{2})^2 + 375 \times (-\frac{1}{2})^2 + 257 \times (\frac{1}{2})^2 + 119 \times (\frac{3}{2})^2 \\ & + 50 \times (\frac{5}{2})^2 + 17 \times (\frac{7}{2})^2 + 2 \times (\frac{9}{2})^2 + 1 \times (\frac{11}{2})^2 + 0 \times (\frac{13}{2})^2) / 100 \end{aligned}$$

$$= \frac{1520}{100} = 1,52 \approx \frac{3}{2}$$

Donc d'après type de la distribution est:  $\sqrt{1,52}$   
 Or la loi de poisson est telle que  $E(X) = V(X)$   
 Donc il est vraisemblable que la distribution étudiée soit une loi  
 de poisson de paramètre  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

① 1) a).

Le produit des distances de  $M$  aux 2 points  $A_p$  les plus proches  
 est  $|x - E(x)| \times |x - E(x) + 1|$

Les points  $A_p$  d'abscisses respectives  $E(x)$  et  $E(x) + 1$  sont les  
 plus proches de  $M$  car  $E(x) \leq x \leq E(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$   
 et que seuls les points d'abscisses appartenant à  $\mathbb{Z}$  appartiennent  
 à  $A_p$

Soit  $|x - E(x)| \times |x - E(x) + 1|$ .

On a  $x \geq E(x)$  et  $E(x) + 1 \geq x \forall x \in \mathbb{R}$

Donc l'expression équivaut à  $(x - E(x))(E(x) + 1 - x)$

b)  $f$  est 1-périodique si et seulement si:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ .

Soit  $f(x+1) = [x+1 - E(x+1)][E(x+1) + 1 - x]$   
 $= [x+1 - E(x) - 1][E(x+1) - x]$   
 $= [x - E(x)][E(x) + 1 - x] = f(x)$ .

c)  $f$  est 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ .

Il convient donc d'étudier la continuité aux bornes de ces périodes.

Ces périodes ont pour bornes, du fait de la fonction partie entière,  $[p; p+1]$  où  $p \in \mathbb{Z}$ . Soit  $p < x < p+1$  et  $p+1 = E(x+1)$

$$+ \lim_{x \rightarrow E(x+1)} \frac{f(x)}{E(x+1)} = \lim_{x \rightarrow E(x+1)} [x - E(x)] [E(x) + 1 - x]$$

$$\lim_{x \rightarrow E(x+1)} E(x+1) \quad [x - E(x)] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow E(x+1)} E(x+1) \quad [E(x) + 1 - x] = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow E(x+1)} \frac{f(x)}{E(x+1)} = 0$$

$$+ \lim_{x \rightarrow E(x)} \frac{f(x)}{E(x)} = 0$$

$$\text{En effet, } \lim_{x \rightarrow E(x)} [x - E(x)] = 0$$

$$\text{et } \lim [E(x) + 1 - x] = 1$$

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

\*  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle est dérivable en tout  $x$  d'une de ses périodes.

C'est le cas si le calcul de la dérivée sans récurrence de dérivabilité donne une fonction continue sur  $[p; p+1[$   $\forall p \in \mathbb{Z}$ . C'est le cas ici.

$$= \frac{1520}{100} = 1,52 \approx \frac{3}{2}$$

Donc d'écart type de la distribution est:  $\sqrt{1,52}$   
 Or la loi de poisson est telle que  $E(X) = V(X)$

Donc il est raisonnable que la distribution étudiée soit une loi de poisson de paramètre  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

(I) 1) a).

Le produit des distances de  $M$  aux 2 points  $A_p$  les plus proches est  $|x - E(x)| \times |x - E(x) + 1|$

Les points  $A_p$  d'abscisses respectives  $E(x)$  et  $E(x) + 1$  sont les plus proches de  $M$  comme  $E(x) \leq x \leq E(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  et que seuls les points d'abscisses appartenant à  $\mathbb{Z}$  appartiennent à  $A_p$

Soit  $|x - E(x)| \times |x - E(x) + 1|$ .

On a  $x \geq E(x)$  et  $E(x) + 1 \geq x \forall x \in \mathbb{R}$

Donc l'expression s'écrivant  $(x - E(x))(E(x) + 1 - x)$

est 1-périodique si et seulement si:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ .

Soit  $f(x+1) = [x+1 - E(x+1)][E(x+1) + 1 - x - 1]$   
 $= [x + 1 - E(x) - 1][E(x+1) - x]$   
 $= [x - E(x)][E(x) + 1 - x] = f(x)$ .