

## MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

*L'usage des calculatrices est autorisé*

***Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.***

**Les parties I, II et III sont indépendantes**

### I

A. Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. Étudier la fonction  $f$ .

2. Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a. Déterminer l'équation des tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux points d'abscisses :  $x = 1$ ,  $x = e$  et  $x = e^2$ .

b. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.  
Étudier la convexité de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

c. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

3. a. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  et exprimer  $f^{-1}(x)$ .

b. Représenter la fonction  $f^{-1}$  dans le plan  $\mathcal{P}$  muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

B. On considère l'intégrale :  $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{3} dx$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la suite de terme général  $I_n$  est convergente.

2. En admettant que l'on a :  $I_{n+1} = \frac{e}{3} - (n+1) I_n$  :

a. Calculer  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

b. Déterminer la valeur de l'intégrale  $J = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{\sqrt[3]{3x}} dx$ .

## II

Dans l'ensemble  $\mathcal{M}_3$  des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère les matrices  $P$  et  $Q$  définies comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = I - P, \quad I \text{ étant la matrice unité de } \mathcal{M}_3.$$

1. a. Montrer que  $P^2 = P$ .  
 b. En déduire les produits :  $PQ$ ,  $QP$  et  $Q^2$ .
2. Soit  $\Phi$  l'ensemble des matrices de la forme  $\alpha P + \beta Q$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.
  - a. Montrer que le produit de deux matrices de  $\Phi$  est une matrice appartenant à  $\Phi$ .
  - b. Montrer que, lorsqu'elle existe, la matrice inverse  $A^{-1}$  d'une matrice  $A = \alpha P + \beta Q$  de  $\Phi$  est une matrice de  $\Phi$  avec  $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} P + \frac{1}{\beta} Q$ .
3. On se propose de résoudre le système d'équations suivant :

$$(E) = \begin{cases} \frac{1+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1-\sqrt{2}}{4}y + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}z = 1 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{4}x + \frac{1+3\sqrt{2}}{4}y + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}z = 1 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}y + \frac{1+\sqrt{2}}{2}z = 1. \end{cases}$$

- a. Montrer que le système (E) peut se ramener à une équation de la forme :

$$(P + \lambda Q) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel que l'on déterminera.}$$

- b. En déduire les solutions de (E).

### III

Un questionnaire à choix multiples est composé de  $N$  questions indépendantes les unes des autres. À chacune de ces questions correspond  $r$  réponses différentes dont une seule est exacte.

Un candidat répond au hasard à chaque question.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par le candidat à l'ensemble du questionnaire.

1. a. Exprimer en fonction de  $N$ ,  $n$  et  $r$  la probabilité que  $X$  soit égale à  $n$ , notée  $P(X = n)$  avec  $0 \leq n \leq N$ .  
b. Exprimer en fonction de  $N$  et  $r$  l'espérance mathématique  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ .
2. Calculer les probabilités que  $X$  soit égale à 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 et calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  dans les deux cas suivants :
  - a.  $N = 20$  et  $r = 2$  ;
  - b.  $N = 20$  et  $r = 5$ .
3. Montrer que dans le premier cas ( $N = 20$  et  $r = 2$ ), on a :  $P(5 < X < 15) \geq 80 \%$  ;  
et que dans le deuxième cas ( $N = 20$  et  $r = 5$ ), on a :  $P(0 < X < 8) \geq 80 \%$ .