

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes

I

Pour tous entiers n et r avec $r > 1$ et $n > 1$, on désigne par $E_n(r)$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$E_n(r) = (a_{ij}^r)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} 1 & - & - & - & 1 \\ r & 1 & & & - \\ - & r & - & & - \\ - & - & - & - & - \\ r & - & - & r & 1 \end{pmatrix}$$

est l'élément de la i -ème ligne et de la j -ème colonne et on a : $a_{ij}^r = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ r & \text{si } i > j \end{cases}$.

Calculer le déterminant de la matrice $E_n(r)$ que l'on note $\det E_n(r)$, et en déduire que la matrice $E_n(r)$ est inversible.

Déterminer la matrice inverse de $E_n(r)$ que l'on notera $E_n(r)^{-1}$.

Soit M la matrice carrée d'ordre n définie par :
$$\begin{pmatrix} a_1 & \beta & - & - & - & \beta \\ \alpha & a_2 & \beta & & & - \\ - & \alpha & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & \beta & - \\ \alpha & - & - & - & \alpha & a_n \end{pmatrix}$$
 avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq \beta$ et

$a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $M(x)$ la matrice obtenue en soustrayant x ($x \in \mathbb{C}$) à tous les éléments de la matrice M .

a. Montrer que le déterminant de $M(x)$, noté $\det M(x)$, est un polynôme de degré au plus égal à 1 en x , c'est-à-dire de la forme $\lambda x + \mu$, et déterminer λ et μ en fonction de α , β et a_i .

b. Déterminer les valeurs propres de $E_n(r)$ dans \mathbb{C} qui seront notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On les exprimera en fonction de r et des racines n -ième de 1 dans \mathbb{C} qui seront notées $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, (pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a : $(\omega_k)^n = 1$).

c. Déterminer les coordonnées d'un vecteur propre v_k de $E_n(r)$ associé à la valeur propre λ_k .

II

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 2} dx$.

1. Montrer que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positif ou nul.
2. Étudier le sens de variation de cette suite, et en déduire qu'elle converge.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \leq 1$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

III

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[0, +\infty[$, deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

On considère les fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $h(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \geq 0$.
3. Montrer que g est croissante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \leq 0$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x) \leq f(0)$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = f(0)$.

IV

Soit \mathcal{E}_n un espace affine euclidien de dimension n .

On considère deux sous-espaces de \mathcal{E}_n : \mathcal{A}_p de dimension p et \mathcal{B}_q de dimension q , orthogonal à \mathcal{A}_p .

On suppose $p > 0, q > 0$ et $p + q \leq n$.

1. Montrer que \mathcal{A}_p et \mathcal{B}_q ont, au plus, un point commun M_0 .
2. Que peut-on dire de plus si $p + q = n$?

3. Soit M un point de \mathcal{B}_q , montrer que si $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{B}_q = \{M_0\} \neq \emptyset$, on a $MM_0 = \inf_{M_1 \in \mathcal{A}_p} MM_1$.
 MM_0 est appelée distance du point M au sous-espace \mathcal{A}_p .

4. Montrer que l'on peut toujours déterminer la distance du point M au sous-espace \mathcal{A}_p , pour tout point M de \mathcal{E}_n .

5. On suppose que \mathcal{E}_n est muni d'un repère orthonormé.

Soit $u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n + h = 0$ l'équation d'un hyperplan \mathcal{A}_{n-1} et M un point donné de \mathcal{E}_n de coordonnées (y_1, y_2, \dots, y_n) .

Exprimer la distance d'un point M à un hyperplan \mathcal{A}_{n-1} en fonction des coordonnées du point M et des coefficients de l'équation de l'hyperplan dans un repère orthonormé.