

MATHÉMATIQUES

Code-matière 030

L'usage des calculatrices est autorisé

Les parties I, II et III sont indépendantes.

*Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.
Les candidats seront jugés sur l'argumentation.*

I

On se place dans l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels.

On note I , A et O les fonctions polynômes définies par :

$$I(x) = 1, \quad A(x) = x \quad \text{et} \quad O(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

On considère une suite (P_n) de fonctions polynômes définies par :

$$P_1 = I, \quad P_2 = A \quad \text{et} \quad P_{n+2} = A P_{n+1} - P_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

1.
 - a. Déterminer le degré du polynôme P_n .
 - b. Calculer $P_n(0)$ en fonction de n .
2. Soit x un réel.
 - a. On suppose que $|x| < 2$ et on pose alors $x = 2 \cos a$ où $a \in]0; \pi[$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a : $P_n(x) = \frac{\sin n a}{\sin a}$.
 - b. On suppose que $|x| = 2$.
Déterminer $P_n(x)$ en fonction de n .
 - c. On suppose que $|x| > 2$.
Montrer qu'il existe un unique réel t tel que : $x = \frac{1+t^2}{t}$ et $|t| < 1$.
Déterminer $P_n(x)$ en fonction de t et n et préciser le signe de $P_n(x)$ selon les valeurs de t et n .
3. Déterminer les valeurs des réels x tels que $P_n(x) = 0$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $P_n^2 - P_{n-1} P_{n+1} = I$.
5. Soient n et p deux entiers tels que $n > 1$ et $p > 0$, montrer que : $P_{n+p} = P_n P_{p+1} - P_{n-1} P_p$.

Tournez la page S.V.P.

II

On définit sur \mathbb{R} une suite de fonctions (u_n) par :

$$u_n(x) = n^\alpha (x^3(1 - nx)^3 + |x^3(1 - nx)^3|), \quad n \geq 1,$$

où α est une constante réelle strictement positive.

1. Étudier les variations de la fonction u_n sur \mathbb{R} .
2.
 - a. Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction que l'on précisera.
 - b. Pour quelles valeurs de α cette convergence est-elle uniforme ?
3.
 - a. Montrer que la série de fonctions (u_n) converge simplement sur \mathbb{R} .
On notera : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
 - b. Montrer que pour tout entier q , $q > 0$, on a :

$$\frac{q^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \sum_{k=1}^q k^\alpha \leq \frac{(q+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}.$$
 - c. En déduire que la fonction $S(x)$ est équivalente à $\frac{12x^{2-\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}$ quand x tend vers 0 par valeur positive.
 - d. Pour quelles valeurs de α , la convergence de la série de fonctions (u_n) est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?
4. Étudier la suite de terme général : $I_n = \int_0^1 u_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$.

III

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y' + y(1 - y) = 0 \quad (E).$$

1. Déterminer les solutions de cette équation.
2. Montrer que les courbes représentatives des fonctions solutions de (E) dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé, sont symétriques deux à deux par rapport à un point dont on précisera les coordonnées.
3. Étudier les variations de ces fonctions.